Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen
unter der Aussicht der königl. Gesellschaft der Wissenschaften.

91. Stück.
Den 7. Junii 1794.

Göttingen.

Hrn. Hofr. Kästners Vorlesung in der königl. Societät handelte: De corporibus regularibus abscissis et elevates, den 17. May. Der Prof. hat in mehrern Abhandlungen die unterschiedenen Gestalten geometrischer Körper betrachtet, meist wie sie aus ebenen regulären Figuren von zwey oder drey Gattungen bestimmt werden, die da einschliessen, doch auch einigemal was reguläre Körper geben, wenn man durch Ebenen senkrecht auf gerade Linien vom Mittlepuncte nach den Spitzen der körperlichen Winkel von ihnen Stücken abschneidet, *de polyedris data lege irregularibus* diss. 1. Prop. VII. und *de sectionibus solidorum, crystallorum structuram illustrantibus*, beyde in *Comment. Math. ad 1783,84.* In der letztgennanten [sollte?] er besonders untersucht was Würfel und Octaeder geben. Jetzt betrachtet er die drey übrigen Körper. Lehnsätze sind: Wenn bey einem ordentlichen Dreyecke, Fünfecke, überhaupt jeder regulären Figur, von jedes Winkels Scheitel auf seinen Schenkeln gleiche Stücke genommen, und deren Endpuncte mit geraden Linien zusammengezogen werden. So lange jedes solches Stück kleiner ist als die Hälfte der Seite, kann man sagen, es werde an jedem Ende der Seite weggenommen, so wie durch die den Winkeln unterzognen Linien, Dreyecke von der Figur weggenommen werden. Da entstehen Figuren mit noch einmal so viel Seiten als die Figur hat, bey welcher man dieses vornimmt, die Seiten sind abwechselnd gleich, und machen gleich grosse Winkel mit einander, halbordentliche Vielecke, in des Vers. Abh. bey geometrischen Abhandlungen I. Samml. 46 gewissen Verhältnissen des Stücks zur Seite werden sie ganz ordentlich.

Göttingen Notices of Learned Matters
Under the supervision of the royal society of the Sciences

91st Piece
June 7th, 1794

Göttingen

Hrn. Hofr.[1] Kaestner's lecture in the Royal Society dealt with: De corporibus regularibus abscissis et elevates[2], the 17th of May. The professor has, in many treatises, examined the various forms of geometric solids, mainly as they are determined to be of two or three classes by the regular plane figures which enclose [them], as well as [examining] several times what results when one cuts pieces from the regular solids by means of planes perpendicular to the straight lines from the center to the vertices of the solid angle: *de polyedris data lege irregularibus* diss. 1. Prop. VII. and *de sectionibus solidorum, crystallorum structuram illustrantibus*, both in *Comment. Math. ad 1783,84*.[3] In the latter he investigates in particular what cubes and octahedrons produce. He now examines the three remaining solids. Lemmas are: if from regular triangles, pentagons, or any regular figures in general whose endpoints are diminished by straight lines, equal segments along their sides are taken from every angle's vertex. As long as each of these segments is smaller than half the side, one can say it will be taken away on each end of the side, just as triangles are taken away from the figure by those lines which subtend the angle. In this way, figures are formed with twice as many sides as had the figure from which these were taken, whose sides are alternately equal, and make equally large angles with one another: semi-regular polygons; they become entirely regular by certain ratios of the segments to the side in the Collected Geometric Treatises I. collection 46th treatise.[4]

Ist das Stück die Hälfte der Seite, so entsteht ein Vieleck, dem gegebenen ähnlich, in dasselbe beschrieben. Nimmt man das Stück grösser als die Hälfte der Seite, so kann man freylich nicht sagen, das es sich von der Seite zweymal wegnehmen liesse, aber die Endpuncte lassen sich doch wie vorhin mit geraden Linien verbinden, und so entsteht eine Figur innerhalb der gegebenen, derselben ähnlich und concentrisch, diese Figur nimmt ab, wenn die Stücken grösser genommen werden, und geht endlich in der gemeinschaftlichen Mittlepunct zusammen. So giebt das gleichseitige Dreyeck anfangs halbordentliche Sechsecke, die werden regular, wenn das Stück ein Drittheil der Seite ist, verwandeln sich in ein Dreyeck in das gegebne beschrieben, wenn das Stück der Seite Hälfte ist, und wird das Stück noch grösser, so entstehen kleinere Dreyecke, welche kleinere Dreyecke in den Mittelpunct zusammengehen, wenn das Stück zwey Drittheile der Seite ist. Nimmt man das Stück noch grösser, so stellen sich diese Dreyecke wiederum her, in einer Lage ihren vorigen entgegengesetzt, und wachsen; das Stück der ganzen Seite gleich genommen giebt ein Dreyeck, das das gegebene deckt.

Nun für die Körper. Die Seite des Körpers heisse allemal a; von der Spitze jedes körperlichen Winkels rechne man auf jeder der Seiten, die ihn einschliessen, gleiche Stücken = x. Durch ihre Endpuncte Ebenen gelegt, nehmen Pyramiden weg, deren Spitzen die der körperlichen Winkel waren, und schneiden des Körpers Seitenflächen *(hedras)*. Die Schnitte der Seitenflächen geben Figuren, wie nach vorhergehenden Lehnsätzen bestimmt werden. Diese Figuren und die Grundflächen der dagewesenen Pyramiden schliessen den Ueberrest des Körpers, den Blotz *(truncus)*, ein. Dieses Verfahren, von den Spitzen des Körpers anzufangen, unterscheidet sich von dem, das in der Abh. *de sect. sol.* gebraucht ward, ohngefähr wie Festungszeichnungen von aussen einwärts, und von innen auswärts.

If the segment is half of the side, then a polygon is formed, similar to the one given, [and] described in it. If a segment greater than half of the side is taken, one can certainly not say that it is permitted to be taken away from the side twice, but the endpoints still permit themselves to be connected with straight lines as before, and thus form a figure inside the one given, similar and concentric to it, and as greater segments are taken, this figure decreases, and eventually comes together in the common center. The equilateral triangle thus produces first a semi-regular hexagon, which becomes regular if the segment is one third of the side, and is transformed into a triangle described in the one given if the segment of the side is one half, and were the segment greater still, smaller triangles would thus be formed, which will come together in the center when the segment is two-thirds of the side. If one takes the segment greater still, the triangle is thus restored to its former condition, in a condition opposite to its previous one, and increased; the segment taken equal to the whole side produces a triangle that corresponds to the one given.

Now for the solids. The sides of the solids are always called **a**; one calculates equal segments =**x** from the vertex of each solid angle along each of the sides which enclose them. Planes laid through their endpoints remove pyramids, whose vertices were the solid angle, and cut the faces of the solid *(hedras)*. The cuts of the faces produce figures, as was established by the foregoing lemmas. These figures and the bases of the aforementioned pyramids enclose the remnants of solids, the truncations *(truncus)*. This procedure, to begin from the vertex of a solid, differs from that which was required in the treatise on sections of solids:[5] [to begin] from the outside inwards, and from the inside outwards, as in drawings of fortresses.

Es wird hier auch für x grösser als ½ a fortgesetzt, selbst beym Dodecaeder für x grösser als a; diese Fortsetzung rechtfertiget sich durch das, was vorhin von ebenen Figuren ist gesagt worden; warum sie nur so weit getrieben wird, bis die Figuren in den Seitenfläche[n] in Puncte zusammengehen, wird man einsehen, wenn man sich errinert, was vorhin vom Dreyecke gesagt worden. So behandelt giebt das Tetraeder Klötze, die in den Ebenen der Seitenflächen Sechsecke haben, der fehlenden Pyramiden Grundflächen sind Dreyecke. Bey x= 1/3a werden die Sechsecke ordentliche, und der Körper ist der ersten Ordnung, ersten Gattung dritte Art, *in diss. de polyedr. III. Prop. V. Commentat. mathem. 1785. 1786.* Für x= ½ a wird er ein Octaeder ins Tetraeder beschrieben, für x grösser als ½ a ist er wiederum in gleichseitige Dreyecke und halbordentliche Sechsecke eingeschlossen, die letzten finden sich in der Grundflächen der fehlenden Pyramiden, und werden für x=3/5 a ganz ordentlich, der Körper ist auch I. Ordn. I. Gatt. III. Art. Für x=2/3 a gehen in den Ebenen der Seitenflächen die Dreyecke in Puncte zusammen, die Sechsecke werden zu Dreyecke und dieser letzte Klotz ist ein Tetraeder in das gegebene beschrieben, seine Seite =1/3 a, die Spitze seiner körperlichen Winkel sind in den Mittelpuncte[n/s?] der Seitenflächen des gegebenen. Setzt man gleichseitige Pyramiden auf jede Seitenfläche des ganzen gegebenen Tetraeders, so entsteht ein Körper auf/s fünf Tetraeder zusammengesetzt, *tetraedrum elevatum*, das gegebene wird von den übrigen vierten bedeckt. Beym Icosaeder ist die Reihe der Klötze folgende: 1) In zwölf ordentliche Fünfecke, zwanzig halbordentliche Sechsecke, die werden für x=1/3 a regulär. Der III. Ordn. einzige Gattung und Art. 2)x= ½ a; I. Ordn. 2. Gatt. 2. Art. 3) x zwischen ½ a und 2/3 a; in zwölf halbordentliche Zehnecke, zwanzig gleichseitige Dreyecke. Für einen Werth von x, der durch den Sinus von 54 Gr. bestimmt wird, und = a. 0,06082711.. ist, werden die Zehnecke ordentlich, und der Körper den/s/r I. Ordn. 1.Gatt. 3. Art.

It will here be likewise when **x** proceeds as greater than ½ **a**, and only for the dodecahedron for **x** greater than **a**; this continuation is justified by what was said to proceed from plane figures; why they are only driven so far, until the figures in the faces come together at the point, will be seen, if what was said to proceed from the triangle is recalled. Taken in this way, the tetrahedron produces shapes, which have hexagons in the planes of the faces, [and] the absent pyramid's bases are triangles. For **x**=1/3 **a** the hexagon will be regular, and the solid is of the first order, first class of the third kind, *in. diss. de polyedr. III. Prop. V. Commentat. mathem. 1785. 1786.*[5] For **x**= ½ **a** it will be an octahedron inscribed in a tetrahedron, for **x** greater than ½ **a** it returns to being enclosed by the regular triangle and semi-regular hexagon, the last find themselves in the bases of the absent pyramids, and become completely regular for **x**= 3/5 **a**, the solid is also of the first order, second class, of the third kind. For **x**=2/3 **a** the planes of the faces of the triangles come together at a point, the hexagon becomes a triangle and this last block is a tetrahedron inscribed in the one given, its side =1/3 **a**, whose vertices of its solid angles are in the midpoints of the faces of the given solid. Setting equilateral pyramids on each face of the whole given tetrahedron, forms a solid of five tetrahedrons put together, *tetraedrum elevatum,*[6] the given one will be covered with the remaining four. For the icosahedron the series of truncations is the following: 1) In twelve regular pentagons, twenty semi-regular hexagons, which become regular when **x**=1/3 **a**. Of the third order, sole class and kind. 2) **x**=1/2**a**; the first order, second class, second kind. 3) **x** between ½ **a** and 2/3 **a**; in twelve semi-regular decagons, twenty equilateral triangles. For a value of **x**, which is determined by the sin of 54°, and =**a**, is 0.06082711…, which is the regular decagon, and a solid of the first order, first class, third kind.

4) x = 2/3 a. Ein Dodecaeder im Icosaeder bescrieben. Nun das Dodecaeder. I Klotz. In 20 gleichseitige Dreyecke, zwölf halbordentliche Zehnecke; die letzten werden für x = a. 0,276393.. die Grösse wird aus Sin 72 Gr. bestimmt,…ganz ordentlich, der Körper der I. Ordn. 1. Gatt. 5. Art. 2) x = ½ a; I. Ordn. 2. Gatt. 2. Art. 3) x grösser als ½ a; In zwölf ordentliche Fünfecke, zwanzig halbordentliche Sechsecke, sie werden ganz ordentlich für x = a 0,887658; der III. Ordn. einziges Geschlecht und Gattung. 4) x = a. 1,51543.. giebt ein Icosaeder, ins Dodecaeder beschrieben. In diesen merkwürdigen Reihen der Körper, die sich aus gegebenen regulären schneiden lassen, kommen auch reguläre vor, in reguläre beschrieben werden, aber nicht alle, die das 15. Buch der Elemente erzählt, selbst in anderer Menge nach andern Recensionen, der griechische [wert] nur fünf, **Campanis** Ausgabe zwölf, und der Clavius **zwanzig**. Begreiflich werden nicht alle diese eingeschriebenen durch Abschneiden nach dem hier angenommenen Gesetze gebildet. Etwas Weniges von ordentlichen Körpern, die durch Schneiden verändert, oder durch Ansetzen vermehrt werden, erwähnt **Schwenter**: Mathematische Erquickstunden, III. Theil, 56. u. f. Aufgabe. Veranlassung in diesen Untersuchungen gab ein Buch, auch als Alterthum des Drucks merkwürdig, das in der Vorrede zu den geometrischen Lehren beschrieben wird. Es ist italiänisch; des Titels erste Worte: **Divina proportione Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria**…zu Venedig 1509 in Fol. gedruckt. Der Verfasser, *Lucas Paciolus*, *Burgensis Minoritanus et sacrae Theol. Prof.*, hat es in einer lateinischen Epistel, *1509, Reip. Florentinae principi perpetuo Petro Sonderino* zugeeignet. Der Titel bezeichnet bekanntemassen die Theilung nach äusserer und mittlerer Verhältniss, deren Gebrauch bey den regulären Körpern begreiflich macht, wie hier von denselben gehandelt wird. **Patiolus** trägt sowohl sie betreffende, als auch andre geometrischen Lehren vor, aber alles ohne Beweise.

4) **x**=2/3**a**. A dodecahedron inscribed in the icosahedron. Now the dodecahedron. First [1)] truncation. In 20 equilateral triangles, twelve semi-regular decagons; the last will be 0.276393… for **x**=**a**, the quantities being determined from sin 72^{o}, …completely regular, the solids of the first order, first class, fifth kind. 2) **x**= ½ **a**; first order, second class, second kind. 3) **x** greater than ½ **a**; in twelve regular pentagons, twenty semi-regular hexagons, they become completely regular for **x**=**a** as 0.887658; of the third order, single species and class. 4) **x**=**a**, 1.51543… produces as icosahedron, inscribed in a dodecahedron. In this noteworthy series of solids, which can be cut out of the given regular ones, other regular ones also present themselves, being regularly inscribed, but not all; which the 15th Book of Elements[7] relates, itself a number of other accounts -the greeks assessed only five, Campanis[8] twelve versions, and Clavius[9] twenty. Conceivably, not all of these inscriptions by [making] cuts conformed to the laws adopted here. Schwenter, [in his] *Matematische Erquickstunden*,[10] discusses the slight diminutions [and augmentations] of regular solids, which are transformed by cuts, or are increased by additions. Induced by these investigations, there was a book of prints as remarkable as those by the ancients, which was described to the geometry teachers in the preface. It is in Italian; the first words of the title [are]: *Divina proportione Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosa necessaria*... The author, Luca Pacioli, had dedicated it in a Latin epistle in 1509 to Petro Sonderino.[11] The title refers to the known ratios of the outer and inner proportions, whose application is made comprehensible by the regular solids, as this will be treated here. Pacioli lectures on both their relevance, as well as other geometric teachings, but all without proofs.

Figuren zu Erläuterung der Lehren sind auf dem breiten Rande von Holzschnitten abgedruckt, auf die Art wie bey **Ratdolds** Ausgabe Euklids, die der Vers. in einem Schreiben an den Cardinal **Quirini** 1750 beschrieben hat, u. a. mathematischen Büchern des ältesten Druckes. Am Ende aber finden sich eine Menge Folioblätter, die einige Anzeige verdienen, jedes enthält einen einzigen Holtzschnitt. Erst: ein Kopf, seitwärts sehend, die linke Seite dargestellt, vermittelst Quadrat und gleichseitiges Dreyeck, darüber: *Divina Proportio*. Im Buch selbst auf den Rande der 2. Seite des 25. Blatter ist eben dergleichen kleiner, die rechte Seite, das Quadrat in kleinere getheilt, und Anweisung zur Zeichnung. Dann 23 Blätter römische Capitalbuchstaben, ohne W und Z, aber O zweymal, eines O *perfectissimo*, jeder in einem Quadrate, dessen Seite 3,65 rheinl. Zoll ist, darunter Regeln sie zu bilden. Nun 61 Abbildungen geometrischen Körper. Jeder wie sich seiner Flächen voll darstellen lassen, und dann bloss seine Kanten, die Ebenen zwischen ihnen nicht ausgefüllt; *solidum* und *vacuum*. So jeder reguläre Körper ganz, dann abgeschnitten; ferner mit Pyramiden auf seinen Flächen besetzt; die Benennungen darunter sind: *planum*, *solidum* und *vacuum*, *abscissum* [f. und v.] *elevatum* f. und v. Jeder reguläre Körper bekömmt so 6 Blätter, auch wohl acht, wenn der beschnittens auch erhoben wird. Den regulären folgen Prismen, Pyramiden, ein Paar andere Körper, z. B. *septuaginta duarum bafium*, aus Euklids XII. B. 14. S. nach **Patioli** Anführung, nähmlich in **Campanis** Uebers. aus dem Arabischen, da ist der Quadrat in 3 Theile getheilt; nach dem Griechischen ist es der 17 S. und der Quadrat in 4 Theile getheilt; zuletzt die Kugel. Noch architectonische Figuren. *Porta temple Domini, dicta speciosa*. Eine Säule; und Glieder.

Figures to illustrate the teachings are printed on the margins of the pages with wooden engravings, in the manner of Ratdolt's[12] edition of Euclid, this endeavor[13] having been described in a letter to Cardinal Quirini[14] in 1750, among other mathematical books of the oldest printers. One finds at the end however, a number of pages, which deserve to be pointed out, each containing a single wood-engraving. First: a head, seen from the side, the left side depicted, by means of squares and equilateral triangles; above it: *Divina Proportio.*[15] In the book itself on the margin of the second side of the 25th sheet is just this very one, but smaller; on the right side, the square divided into smaller [parts], and instructions to the drawings. Then, 23 sheets of roman capital letters, without W and Z, but O two times, a *perfect* O, each in a square, whose side is 3.65 Rheinland inches,[16] and the rules for constructing them underneath. Then 61 illustrations of geometric solids. Each allows its surfaces to be fully depicted, and then merely its edges, not filling out the planes between them; *solidum* and *vacuum*.[17] Then each whole regular solid, then cropped; further with pyramids placed on their faces; the terms are underneath: *planum, solidum,* and *vacuum*, *abscissum* [script illegible] *elevatum* [f. and v.]. Each regular solid has six sheets, also, take note, whether the cuts are also raised up. The regulars are followed by prisms, pyramids, a pair of other solids, for example *septuaginta duarum bafium*, from Euclid's 12th Book, section 14. After Pacioli's citation, namely in Campanis' translation from Arabic, there is the square divided into three parts; in the Greek 'the 17th section' the square is divided into four parts; [and] finally the sphere. Some architectural figures. *Porta temple Domini, dicta speciosa.*[18] A column; and parts.

Am Ende die sonst gewöhnlichen Namen der Verhältnisse, in die Figur eines Baumes gestellt: Arbor, *Proportio et Proportionalitas*. Die Bilder des Körper sind sehr schön perspectivisch; nach P. Berichte in erwähnter Zuschrift sind es: *Schemata Vincii nostril Leonardi manibus scalpta, quod spetcen instructiorem reddere possent, addita.* Der Verzeichniss steht am Anfange des Buches griechisch und lateinisch, und über jedem Körper der Name griechisch, kleinere Schrift ohne Accente und Spiritus, unter ihm lateinisch, an seiner rechten Seite das Griechische mit lateinischen Buchstaben, nach der Aussprache der neuern Griechen, z. B. beym abgeschnitten mit Pyramiden besetzen leeren Octaeder: *αποτςτμημενον επηρμενον κενον*, *Apo[is]tmimenon Epirmenon Cenon*. Den *ingegni perspicaci e curiosi*, welchen das Buch bestimmt war, ward also nicht angemuthet griechisch lesen zu können, und wahrscheinlich haben sie dann auch die lateinische Abschrift falsch gelesen, z. B. hier das letzte Wort: *Zenon*, wie es unsre neuen deutschen Orthographieverhunzer wirklich schreiben würden. Uebrigens geht P. beym Abschneiden nicht weiter als bis x = ½ a, und stellt von jedem regulären Körper nur einen beschnitten dar. In mehrerwähnter Zuschrift erzählt er noch, er habe sein Werk *Ludouico Sphorciae, Duci Mediolanensi,* gewidmet, es sey aber bey dessen Regierung verloren gegangen, und vom **Soderin** wieder geschafft worden. Das bezieht sich offenbar auf das Manuskript, und *Wallisius de Algebra cap. 13.* hat es unrecht so ausgelegt, als ware das Buch schon einmal vor 1509 gedruckt. **Patiolus** war ein berühmter Geometer seiner Zeit. *Euclidis opera a Campano interprete sidissimo tralata…* sind vom *A. Paganius Paganinus* Vened. 1509 gedruckt; da befinden sich Verbesserungen vom **Paciolus** mit **Castigator** unterzeichnet. Eine Probe davon ist im angef. Schreiben an den Card. **Quarini** gegeben. Man s. auch des Vers. geometrische Abhandlungen I. Samml, 33 Abh. 15. §. Un[ter] dem Uffenbachischen Vermächtnisse an hiesige Universität befinden sich viel Modelle geometrischer Körper aus Pappe, auch abgeschnittne und mit Pyramiden erhobene, deren einige vorgezeigt wurden.

At the end, the otherwise common names of the proportions are placed in the figure of a tree: Arbor, *Proportio et Proportionalitas*. The constructions of the solids are in very beautiful perspective; after Pacioli's report, in the above dedication is read: *Schemata Vincii nostril Leonardi manibus scalpta, quod spetcen instructiorem reddere possent, addita.* The index lies at the beginning of the book in Greek and Latin, and above each solid its Greek name, small script without accents and breathing marks, Latin below it, Greek on the right side with Latin characters, after the pronunciation of the new Greek, e.g. by the cuts with Pyramids occupying the spaces of the octahedron: *αποτςτμημενον επηρμενον κενον*, *Apo[is]tmimenon Epirmenon Cenon.*[18] The *ingegni perspicaci e curiosi*, by whom the book was named, thus appears to not have been able to read Greek, and has possibly also read the Latin transcript incorrectly, e.g. here the last word: *Zenon*, as it would really be written with our new flawed German orthography. Pacioli incidentally makes cuts no greater than **x**= ½ **a**, and illustrates only one truncation for each regular solid. In the further above dedication he yet relates he has devoted his work to *Ludouico Sphorciae, Duci Mediolanensi*, it having been lost however by this government, and recreated by Soderin.[19] It was apparently procured from the manuscript, and *Wallisius de Algebra cap. 13.*[20] has so wrongly interpreted it, as/than was the book already published once before 1509. Pacioli was a known geometer of his time. *Euclidis opera a Campano interprete sidissimo tralata*…was published by *A. Paganius Paganinus* in 1509; there are found corrections of Pacioli's undersigned with **Castigator**.[21] A proof thereof is given in the cited letter to Cardinal Quarini. See the Collected Geometric Treatises. Many models of geometric solids from Pappas are found in Uffenbach's[22] bequests to a great university, also of truncations and augmentations with pyramids, in which some would be demonstrated.

[1]A title bestowed upon academic officials indicating honorable service. Originated with the Holy Roman Empire of the German Nation as a title for a representative to the 'Hofrat'- a council/governing body for particular regions. There is really no equivalent in English, but 'Sir Councilor' or 'the Right Honorable,' serve to give a taste of this appellation.

[2]Latin: On truncated and stellated regular solids.
An extensive article of the same name appears in the *Commentationes Mathematicae* on the same date. The full article can be found here:
http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?did=D233708

[3] Commentaries on Mathematics, 1783/84. This is a section of a yearly Latin publication at Goettingen, *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores,* to which Kaestner, as well as other notable professors such as Gesner, Mayer, Heyne, and later Gauss, regularly submitted articles.

[4]Der Versammelte Abhandlung: Geometrische Abhandlungen

[5] Commentaries on Mathematics: *De corporibus polyedris data lege irregularibus,* 1785. The classes referred to are developed in proposition V. Briefly, they are as follows: **Order (*Ordines*)** I. triangular solid angles II. square angles III. pentagonal angles. **Class (*Genera*)** (Order I) I. one triangular angle II. two III. three IV. four. (Order II) I. one square II. two squares. (Order III) I. one pentagonal. **Kind (*Species*)** (Order I, Class I) 1. two square 2. three square (Order I, Class II) 1. two square 2. two pentagonal ETC…

[6]Latin: stellated tetrahedron

[7] The "15th Book of the Elements" was not written by Euclid, but rather much later.

[8] Campanus, Johannes (1220-1296). An Italian astronomer, astrologer and mathematician who translated an Arabic version of Euclid's elements into Latin in 1260.

[9] Clau, Christopher (1538-1612). Born in Bavaria, the Latinized version of is name became Clavius. A well-known astronomer and mathematician, contemporary of Kepler, Brahe, Galileo and Magini. Major works covered spherical geometry, astrolabes and sundials, and reform of the calendar.

[10]III. Theil, 56. u. f. Aufgabe. *Deliciae physico-mathematicae***,** or *Mathematische und philosophische Erquickstunden.* Schwenter, Daniel (1585-1636). Professor of Oriental languages and Mathematics at the University of Altdorf. Taught Greek, Hebrew, Arabic, Syriac, and Aramaic. Studied the human eye as part of his investigation of optics.

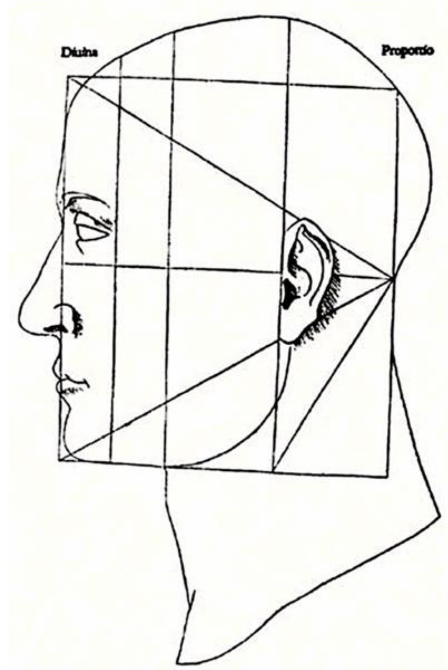
[11] Pacioli, Luca (1445-1514/17) Full title: *Divina proportione: opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria oue ciascun studioso di philosophia, prospectiua pictura sculpura, architectura, musica, e altre mathematice, suauissima, sottile, e admirabile doctrina consequira, e delectarassi, cō varie questione de secretissima scientia. M. Antonio Capella eruditiss. recensente.* Published in Venice in 1509. See http://lcweb2.loc.gov/cgi-bin/ampage for a complete pictorial volume. *Burgensis Minoritanus et sacrae Theol. Prof. 1509, Reip. Florentinae principi perpetuo Petro Sonderino*

[12] Ratdolt, Erhard (1442-1528). A German from Augsburg, who worked as a printer in Venice. Did work for Regiomontanus, but is best known for his printing of the Elements, especially for solving the problem of how to reproduce mathematical figures.

[13]Der Vers." reads the original, which I have taken to be 'Der Versuch,' 'the endeavor,' as this seemed most appropriate.

[14]Quirini, Angelo Maria (1680-1755). An Venetian Cardinal and scholar; appointed a member of the Berlin Academy amidst the Leibniz-Newton affair. His historical role requires further historical investigation.

[15]The illustration described:



[16] A Rheinland inch was a contemporary measurement. There are approx. 11 Rheinl. inches in one foot.

[17] Latin: solid and vacuum

[18]Greek: truncated and stellated solids (vacuum)

[19]'Ludouico Sphorciae': more known as Ludovico Sforza, the Duke of Milan, and famous patron of Leonardo da Vinci. 'Soderin'is likely the same as the 'Sonderin' mentioned above.

[20]John Wallis, a fairly well-known English mathematician of the 17th-century, who wrote the book *Algebra.* He was the professor of geometry at Oxford in the generation before Newton.

[21]"Evidently, Pacioli occasionally used the nom de plume of "Castigator" in making editoorial comments on other works- including that of Campanus." (David Shavin)

[22]'Pappas': more known as Pappus, the Greek geometer. See the works of Johannes Kepler. Uffenbach, Philipp (1566-1636). Renowned German Painter.

**for more excellent pedagogy on the truncation of the five regular solids, see
http://wlym.com/~animations/harmonies/site.php?goto=BookII.html

--Special thanks to David Shavin for assistance with the Greek, as well as the footnoting.